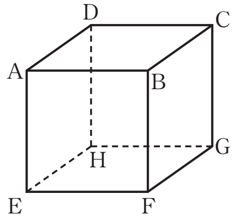
第22講　ベクトル(4)

1　図のような1辺の長さを1とする立方体ABCD-EFGHを考える．線分AHと線分EDの交点をKとする．さらに，辺CGを3：1に内分する点をLとし，辺EFを$p:(1-p)$に内分する点をMとする．ただし，$0<p<1$である．また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{EH}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{EA}}$とおく．



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{KL}}$および$\overrightarrow{\mathrm{KM}}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{KL}}$と$\overrightarrow{\mathrm{KM}}$が垂直になるような$p$の値を求めよ．

(3)　直線KLと面EFGHを含む平面との交点をQとする．

(i)　線分EQの長さを求めよ．

(ii)　△EKQの面積を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標空間内で，原点O，A(1，0，0)，B(b_1，b_2，0)，C(c_1，c_2，c_3) を頂点とする正四面体を考える．ただし，b_2 と c_3 は正とする．

(1)　b_1，b_2 および c_1，c_2，c_3 を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ．

(3)　P は直線 BC 上の点で，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であるとする．P の座標を求めよ．また，$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　座標空間内において，2点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$ を端点とする線分 OA，平面 $z=2$ 上に点 $(0,\ 0,\ 2)$ を中心とする半径1の円周 C，および C 上の動点Pがあるとする．

(1)　直線PAと xy 平面との交点を A' とするとき，A' の軌跡の方程式を求めよ．

(2)　線分 OA' が動いてできる xy 平面上の図形を描け．

(3)　(2)の図形の面積を求めよ．

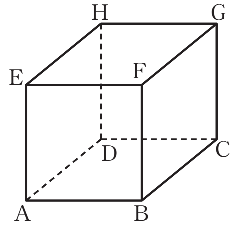
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　ベクトル(4)

右の立方体 ABCD-EFGH の1辺の長さは1である．線分 AH の中点を P，線分 HC を 1：2 に内分する点を Q とする．また，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおく．



(1)　$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{\boxed{ア}}\vec{a}+\frac{1}{\boxed{イ}}\vec{b}+\frac{1}{\boxed{ウ}}\vec{c}$ である．

(2)　線分 CG を 3：1 に内分する点を R とする．線分 BR 上に点 S を，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{DS}$ が垂直になるようにとると，$\overrightarrow{DS}=\vec{a}-\frac{11}{\boxed{エオ}}\vec{b}+\frac{1}{\boxed{カ}}\vec{c}$ である．

(3)　次に，点 B，C，G，F を含む平面上に点 T を，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{DT}$ が垂直になるようにとる．線分 DT の長さは $\overrightarrow{DT}=\vec{a}-\frac{\boxed{キ}}{5}\vec{b}-\frac{\boxed{ク}}{5}\vec{c}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}$ をとる．

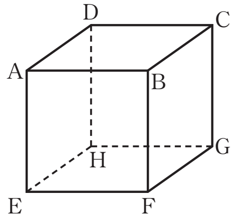
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　ベクトル(4)

1　図のような1辺の長さを1とする立方体 ABCD-EFGH を考える．線分 AH と線分 ED の交点を K とする．さらに，辺 CG を 3：1 に内分する点を L とし，辺 EF を $p:(1-p)$ に内分する点を M とする．ただし，$0<p<1$ である．また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{EH}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{EA}}$ とおく．



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{KL}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{KM}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{KL}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{KM}}$ が垂直になるような p の値を求めよ．

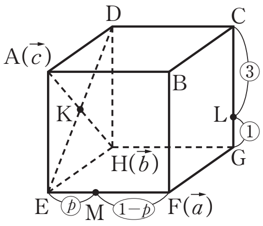
(3)　直線 KL と面 EFGH を含む平面との交点を Q とする．

　(i)　線分 EQ の長さを求めよ．

　(ii)　△EKQ の面積を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{KL}}=\overrightarrow{\mathrm{EL}}-\overrightarrow{\mathrm{EK}}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}\right)-\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{4}\vec{c}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}(4\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})}$

$\overrightarrow{\mathrm{KM}}=\overrightarrow{\mathrm{EM}}-\overrightarrow{\mathrm{EK}}=p\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(2p\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})}$

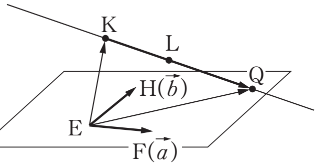


(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{KL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KM}}=\dfrac{1}{8}(4\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\cdot(2p\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})=0$

$8p-2+1=0$　　よって　$\boldsymbol{p=\dfrac{1}{8}}$

(3)　(i)　Q は直線 KL 上の点であり，$\overrightarrow{\mathrm{KL}}\,/\!/\,(4\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$ であることより，実数 k を用いて



$\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=\overrightarrow{\mathrm{EK}}+k(4\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

$=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+k(4\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

$=4k\vec{a}+\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\vec{b}+\left(-k+\dfrac{1}{2}\right)\vec{c}$

と表せる．

また，Q は平面 EFGH 上の点より　$-k+\dfrac{1}{2}=0$　　$k=\dfrac{1}{2}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=2\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}=\dfrac{1}{2}(4\vec{a}+3\vec{b})$

$|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}|^2=\dfrac{1}{2^2}|4\vec{a}+3\vec{b}|^2=\dfrac{1}{2^2}(16+9)=\dfrac{25}{2^2}$　　$\mathrm{EQ}=|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}|=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

(ii)　$|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|^2=\dfrac{1}{2^2}|\vec{b}+\vec{c}|^2=\dfrac{1}{2^2}(1+1)=\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{EK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=\dfrac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c})\cdot(4\vec{a}+3\vec{b})=\dfrac{1}{4}\times 3=\dfrac{3}{4}$

よって　$\triangle\mathrm{EKQ}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{EK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EQ}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{25}{4}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{41}}{8}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標空間内で，原点 O，$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(b_1,\ b_2,\ 0)$，$C(c_1,\ c_2,\ c_3)$ を頂点とする正四面体を考える．ただし，b_2 と c_3 は正とする．

(1)　b_1，b_2 および c_1，c_2，c_3 を求めよ．　　(2)　$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ．

(3)　P は直線 BC 上の点で，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であるとする．P の座標を求めよ．また，$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ．

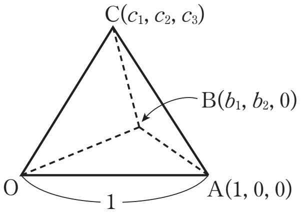
(1)　$OB=OA=1$ より　$b_1{}^2+b_2{}^2=1$　……①　　$AB=1$ より　$(b_1-1)^2+b_2{}^2=1$　……②

①−②より　$2b_1=1$　よって　$\boldsymbol{b_1=\frac{1}{2}}$　　このとき　$b_2{}^2=\frac{3}{4}$　より　$\boldsymbol{b_2=\frac{\sqrt{3}}{2}}$　(>0)

このとき　$CO=1$　より　$c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2=1$　……③

$CA=1$　より　$(c_1-1)^2+c_2{}^2+c_3{}^2=1$　……④

$CB=1$　より　$\left(c_1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c_2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+c_3{}^2=1$　……⑤



③−④より　$2c_1-1=0$　　$\boldsymbol{c_1=\frac{1}{2}}$

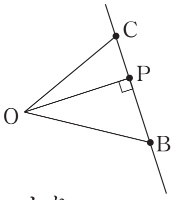
このとき③−⑤より　$\sqrt{3}\,c_2+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=0$　　$\boldsymbol{c_2=\frac{\sqrt{3}}{6}}$

よって③より　$c_3{}^2=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$　　$\boldsymbol{c_3=\frac{\sqrt{6}}{3}}$　(>0)

(2)　$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ 0)$，　$\overrightarrow{BC}=\left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$　より

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times0+0\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+0\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=0$　　よって　$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$

(3)　P は直線 BC 上の点より



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)+t\left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{BC}$ より　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}+t|\overrightarrow{BC}|^2=0$

ここで　$|\overrightarrow{BC}|=1$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\times0+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+0\times\frac{\sqrt{6}}{3}=-\frac{1}{2}$　より，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}+t=0$　　$t=\frac{1}{2}$

よって　$\boldsymbol{P\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{6}\right)}$　　また，$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

このとき　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$　より　$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$

【別解】　(2)より $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$　かつ　$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{BC}$　　よって　平面 $OAP\perp\overrightarrow{BC}$

ゆえに　$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$

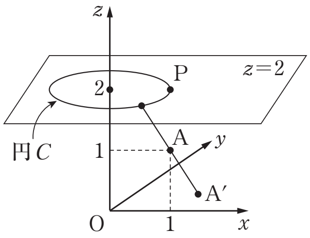
3　座標空間内において，2点O(0, 0, 0)，A(1, 0, 1)を端点とする線分OA，平面 $z=2$ 上に点 (0, 0, 2) を中心とする半径1の円周 C，および C 上の動点Pがあるとする．

(1)　直線PAと xy 平面との交点をA′とするとき，A′の軌跡の方程式を求めよ．

(2)　線分OA′が動いてできる xy 平面上の図形を描け．

(3)　(2)の図形の面積を求めよ．

(1)　円 C 上の点PはP$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 2)$ と表せる．



直線PA上の点をQとすると実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AP}=(1,\ 0,\ 1)+t(\cos\theta-1,\ \sin\theta,\ 1)$$
$$=(1-t+t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1+t)$$

と表せ，z 成分が0のときの点が点A′である．

よって　$1+t=0$　　$t=-1$

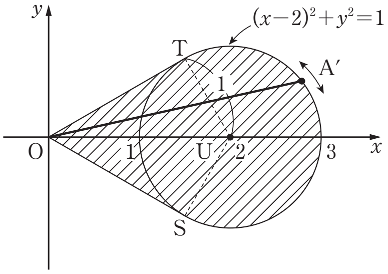
このとき　$A'(2-\cos\theta,\ -\sin\theta,\ 0)$

$X=2-\cos\theta$，$Y=-\sin\theta$ とおくと　$\cos\theta=2-X$，$\sin\theta=-Y$

これらと　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より　$(X-2)^2+Y^2=1$

よって，求めるA′の軌跡の方程式は　$\boldsymbol{(x-2)^2+y^2=1,\ z=0}$

(2)　右図斜線部分．ただし，OT，OSは円 $(x-2)^2+y^2=1$ の接線であり，点Uはこの円の中心である．



(3)　$\cos\angle OUT=\dfrac{UT}{OU}=\dfrac{1}{2}$　より　$\angle OUT=\dfrac{\pi}{3}$

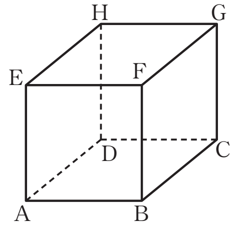
また　$OT=\sqrt{3}$

よって，求める面積は　$\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times2+\dfrac{1}{2}\times1^2\times\dfrac{4}{3}\pi=\boldsymbol{\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\pi}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　ベクトル(4)

右の立方体ABCD-EFGHの1辺の長さは1である．線分AHの中点をP，線分HCを1：2に内分する点をQとする．また，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおく．

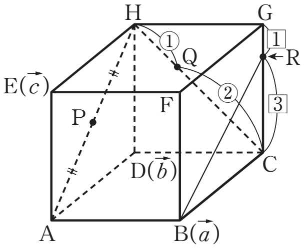


(1)　$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{\boxed{ア}}\vec{a}+\dfrac{1}{\boxed{イ}}\vec{b}+\dfrac{1}{\boxed{ウ}}\vec{c}$ である．

(2)　線分CGを3：1に内分する点をRとする．線分BR上に点Sを，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{DS}$ が垂直になるようにとると，$\overrightarrow{DS}=\vec{a}-\dfrac{11}{\boxed{エオ}}\vec{b}+\dfrac{1}{\boxed{カ}}\vec{c}$ である．

(3)　次に，点B，C，G，Fを含む平面上に点Tを，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{DT}$ が垂直になるようにとる．線分DTの長さは $\overrightarrow{DT}=\vec{a}-\dfrac{\boxed{キ}}{5}\vec{b}-\dfrac{\boxed{ク}}{5}\vec{c}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}$ をとる．

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$



(1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AH}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH}$

$=\dfrac{2}{3}(\vec{b}+\vec{c})+\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=\dfrac{1}{\mathbf{3}}\vec{a}+\dfrac{1}{\mathbf{2}}\vec{b}+\dfrac{1}{\mathbf{6}}\vec{c}$

(2)　Sは線分BR上の点より　$\overrightarrow{BS}=t\overrightarrow{BR}$ $(0<t<1)$ とおくと

$\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{BR})-\vec{b}=\vec{a}+t\left(\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{c}\right)-\vec{b}=\vec{a}+t\vec{b}-\vec{b}+\dfrac{3}{4}t\vec{c}$

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{DS}$　より　$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DS}=\dfrac{1}{3}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{2}t|\vec{b}|^2-\dfrac{1}{2}|\vec{b}|^2+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{4}t|\vec{c}|^2=0$

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}t=0$　　$\dfrac{5}{8}t=\dfrac{1}{6}$　　$t=\dfrac{4}{15}$　　よって　$\overrightarrow{DS}=\vec{a}-\dfrac{11}{\mathbf{15}}\vec{b}+\dfrac{1}{\mathbf{5}}\vec{c}$

(3)　Tは平面BCGF上の点より　$\overrightarrow{DT}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CT}=\vec{a}+(\alpha\vec{b}+\beta\vec{c})$ とおくと

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{DT}$　より　$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DT}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\alpha+\dfrac{1}{6}\beta=0$　　$\beta=-3\alpha-2$

このとき　$|\overrightarrow{DT}|^2=1+\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+(-3\alpha-2)^2+1=10\left(\alpha+\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{7}{5}$　より

$\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\beta=-\dfrac{1}{5}$

よって　$\overrightarrow{DT}=\vec{a}-\dfrac{\mathbf{3}}{5}\vec{b}-\dfrac{\mathbf{1}}{5}\vec{c}$　のとき　$|\overrightarrow{DT}|$ は最小値 $\sqrt{\dfrac{7}{5}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{35}}}{\mathbf{5}}$　をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。